数理解析研究所講究録
301巻 1977年 93-105

3次元Poincaré予想の計算機実験について

東工大　情報科学科　　本間龍雄

§0 序

四色問題の解決が伝えられる今日において，低次元トポロジーに関する未解決な問題の中で最も有名なのが，Poincaré予想である。四色問題と比較しても難しいという点では甲乙つけがたく，数学的重要性に関しては上と思われる。もしもPoincaré予想が解決すれば，低次元トポロジーはもちろん，トポロジー全般の研究が大幅に前進することは，十分期待できる。しかし解決に至る道は非常に険しいらしい。ここでは，コンピュータを用い組合せ的方法による実験的試みについて述べる。

Poincaré予想とは「ホモトピー・タイプがn次元球面と一致するn次元閉多様体はn次元球面と同相であろう」という期待である。ホモトピー・タイプが一致するということを，もっと代数的に述べると，各次元のホモトピー群がn次元球

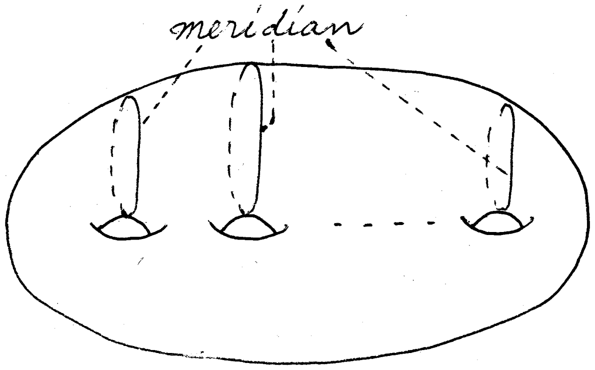
面のそれと同型ということになるが，群という代数的規定から多様体の位相的構造を決定できるであろうという予想である。

Poincaré 予想は $n=1, 2$ の場合は明らかであり，n が 5 以上の場合も E. C. Zeeman [20] 等により肯定的に解決されたので，残るのは $n=3, 4$ の場合で，3 次元と 4 次元では，その問題は深く関連していて，一方が解決されれば他方も解決できる可能性が大きい。歴史的には，この予想を提起したのは，もちろん H. Poincaré で次元は 3 である。本稿でも 3 次元に限って述べるが，3 次元 Poincaré 予想はつぎのようになる。

「基本群（1 次元ホモトピー群）が，trivial な 3 次元閉多様体は 3 次元球面と同相であろう」

§1 Heegaard 分解

いろいろな方面から Poincaré 予想の研究が行われているが，Heegaard 分解を用いる方法が最も正攻法であり，またコンピュータにかせるには今のところ一番良い方法と思われる。球に n 個のハンドルをつけた図形（あるいは球に n 個の真直ぐなトンネルを堀った図形）と同相な 3 次元多様体を genus n の solid torus という。genus n の solid torus の n 個のハンドルに相当するところを輪切りにして



solid torus

切りはなすともとの球にもどるが，その輪切りされる部分を meridian disc と呼び，meridian disc の境界線を meridian，の全体を meridian 系と呼ぶ。

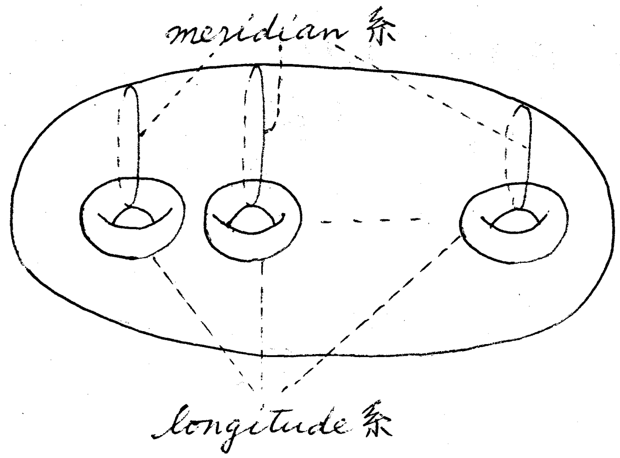
genus n の solid torus 二つを M, L とし，その境界 ∂M, ∂L は同相であるから，$f: \partial L \to \partial M$ を一つの同相写像とする。（f の選び方はさまざまにある。）この同相写像 f で対応する点どうしを同一視して，M と L をはり合わせると，一つの3次元閉多様体 W を得るが，$W = M \underset{f}{\cup} L$ と書き，W の genus n の Heegaard 分解という。Heegaard 分解が Poincaré 予想の研究に使われる理由の一つは，つぎの定理である。

定理 1　任意の向きづけ可能な3次元閉多様体は Heegaard 分解をもつ。

さらに重要なことは3次元閉多様体 $W = M \underset{f}{\cup} L$ の位相的構造は f によって定まり，f は L の meridian 系の像が，$\partial M = f(\partial L)$ 上でどのように走っているかによって定まる。

$\partial M = f(\partial L)$ を Heegaard 分解の splitting surface と呼び N と書くことにする。L の meridian 系の f による像を Heegaard 分解の longitude 系と呼び，M の meridian 系を Heegaard 分解の meridian 系と呼ぶことにする。3次元閉多様体 $W = M \cup_f L$ の位相的構造は，meridian 系と longitude 系が splitting surface N の上でどのように交わり，どのように走っているかによって定まる。Poincaré 予想の研究に Heegaard 分解が有効と思われる二番目の理由は，つぎの Waldhausen [19] の結果である。

定理 2　3次元球面 S^3 の任意の genus n の Heegaard 分解において，適当に meridian 系，longitude 系を選んで，つぎの図のような位置における。



meridian 系，longitude 系を総称して m, l-系と呼び，定理 2 のような m, l-系を標準型と呼ぶ。

$W = M \cup_f L$ の位相的構造は m, l-系によって定まることは既に述べたが，例えば W の基本群 $\pi_1(W)$ は meridian 系（または longitude 系）を生成元，longitude

系(または meridian 系)を関係として表示できる。N の meridian 系 $\underline{\mu} = \{m_1, m_2, \cdots, m_n\}$, longitude 系 $\underline{\lambda} = \{l_1, l_2, \cdots, l_n\}$ と書き，それぞれの meridian, longitude に向きを与えておく，また splitting surface N にも向きを与えておく。l_i が m_j と交わるとき向きに従って，$m_j\ (= m_j^{+1})$ または m_j^{-1} と読み，それを文字とみなして l_i の向きの順に並べた語を $\widehat{l_i}$ と書くことにすると，つぎの定理を得るが，これが Heegaard 分解が有効な第三の理由である。

定理 3　基本群 $\pi_1(W)$ は $\langle m_1, m_2, \cdots, m_n \mid \widehat{l_1} = \widehat{l_2} = \cdots = \widehat{l_n} = 1 \rangle$ $(\langle l_1, l_2, \cdots, l_n \mid \widehat{m_1} = \widehat{m_2} = \cdots = \widehat{m_n} = 1 \rangle)$ と表示できる。

Poincaré 予想の解決には基本群 $\pi_1(W)$ が trivial かどうかを判定する方法を見出さなければならないが，これは非常に難しく解決をさまたげる大きな根拠となっている。しかし一次元ホモロジー群 $H_1(W)$ は一次元ホモトピー群(基本群)$\pi_1(W)$ を可換化したものであるから，meridian m_i と longitude l_j の代数的交点数を a_{ij} と書くと，つぎの定理が成立するが，これはコンピュータ実験に利用できる。

定理 4　$H_1(W)$ が trivial になるための必要十分条件は行列式

$$D(W) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

の値が ± 1 となることである。

もちろん $\pi_1(W)$ が trivial ならば，$H_1(W)$ は trivial であるから，上の定理により $D_1(W) = \pm 1$ であるような 3 次元閉多様体（ホモロジー 3 次元球面）W について検討すれば良いことになる。

§2　genus 2 の Heegaard 分解

3 次元閉多様体が genus 1 の Heegaard 分解をもつ場合は Poincaré 予想は肯定的に解決しているので，genus 2 の場合が当面の目標になる。genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3 次元多様体の研究は Birman [3]，高橋 [23]，本間 [21]，落合 [22] 等によって近年多少の進展をみている。一つの方法は，そのような多様体は結び目を分岐線とする S^3 の branched covering になっていることに注目し，結び目の問題に帰着せしめることである。私は genus 2 の Heegaard 分解をもつ S^3 は標準型以外は reducible という非常に見分けやすい特徴をもっていることを証明し，その性質を用いて S^3 を判定するアルゴリズムを得たので，さらに基本群

$\pi_1(W)$ が trivial かを判定する方法を検討している。

今後 m. l－系は常に transversal に交わり，meridian あるいは longitude を isotopy で動かすことだけでは，交点は除けない状態になっているものとする。genus 2 の Heegaard 分解はつぎの定理の示されるような対称性をもっているので，genus 3 以上から見れば容易である。

定理 5　$\{m_1, m_2\}$，$\{l_1, l_2\}$ を genus 2 の Heegaard 分解の m. l－系とすると，splitting surface N の involution f が存在して，

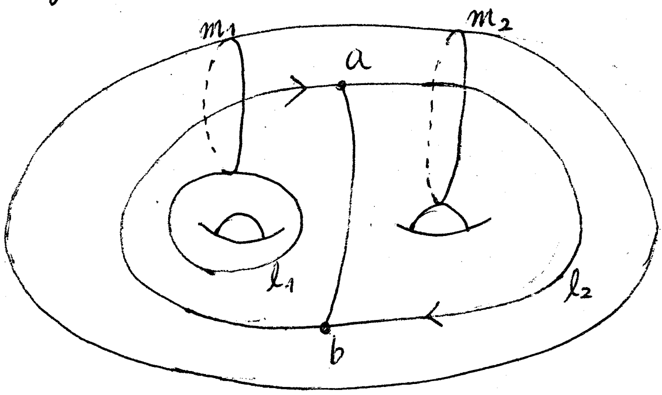
$$f(m_1) = m_1,\quad f(m_2) = m_2,\quad f(l_1) = l_1,\quad f(l_2) = l_2$$

を満足する。

ある Heegaard 分解の m. l－系において meridian m_i（または longitude l_j）が存在し，さらに m_i または l_j の二点 a, b を結ぶ splitting surface N 上の曲線 ab が存在し

i)　ab はその m. l－系には a, b 以外では交わらず，

ii)　m_i（または l_j）とは図のような向きで交わり，



reducible

iii)　a, b を端点とする m_i（または l_j）の二つの弧は共

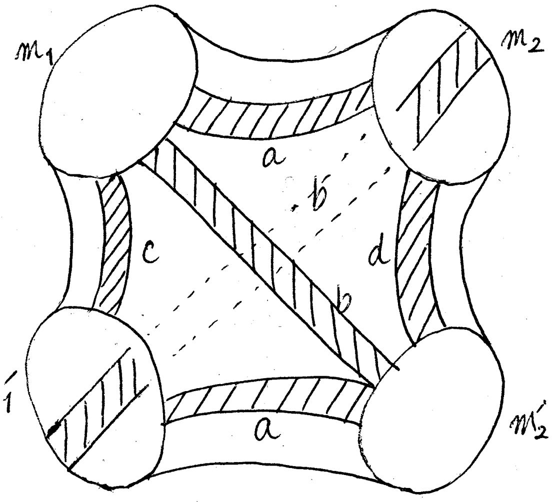
に longitude 系（または meridian 系）と交わるとき，reducible であると定義する。reducible な m. l－系は，つぎのような性質があるので，reduction が可能となる。

<u>定理 6</u> Heegaard 分解が reducible な m. l－系をもてば，さらに交点数の少ない m. l－系をもつ。

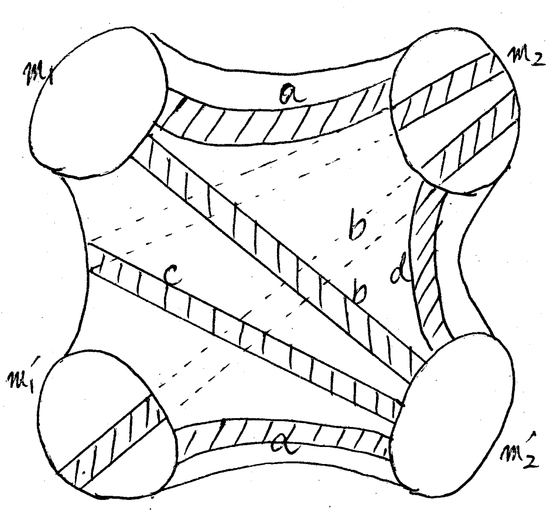
既に触れた genus 2 の Heegaard 分解をもつ 3 次元閉多様体が S^3 であるかを判定するアルゴリズムが存在するのは，つぎの定理による。

<u>定理 7</u> S^3 の genus 2 の Heegaard 分解では，標準形以外の m. l－系は reducible である。

reducible でない m. l－系を <u>irreducible</u> と呼ぶが，上の定理は，S^3 の場合は irreducible な m. l－系は一意的に定まることを主張している。一般の 3 次元閉多様体に関しては，genus 2 でも定理 7 のような一意性は成立しないが，irreducible な m. l－系をもつ 3 次元閉多様体を検討すれば，すべてを調査したことになる。特に genus 2 なら irreducible の場合は二つの type に限って検討すれば良いことがわかる。いま二つの meridian m_1 と m_2 で N を輪切りにすると，longitude 系は図のような帯状の部分の中を走っているものとして良い，a, b, c, d は帯の中を走っている longitude の弧の本数である。



type 1



type 2

<u>定理 8</u>　irreducible な m.l-系は，type 1 または type 2 に分類される。

ただし，type 1，type 2 でも reducible な m.l-系が含まれているが，その場合は基本群 $\pi_1(W)$ を $\langle m_1, m_2 \mid \hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 1 \rangle$ と表示したとき，つぎのような定理が成立するので，reducible な m.l-系を除くアルゴリズムが存在する。

<u>定理 9</u>　type 1 または type 2 の m.l-系が reducible ならば，その $\pi_1(W)$ の表示 $\langle m_1, m_2 \mid \hat{l}_1 = \hat{l}_2 = 1 \rangle$ において，語 $\hat{l}_1$，$\hat{l}_2$ の一方が他方に含まれている。

§3 コンピュータによる実験

実験においては，まず3次元閉多様体をつくり（(1),(2),(3)），$\pi_1(W)$を表示し(4)，$H_1(W)$がtrivialなもの（ホモロジー3次元球面）を選び(5)，最後にS^3を除く(6)。

(1) type 1またはtype 2と非負の整数 a, b, c, d を選び，それぞれを本数とするように，帯の中にlongitudeの弧に相当する平行線を走らせる。

(2) m_1とm_1'，m_2とm_2'をはり合わせ，(1)でつくった弧の端点どうしをつないで，いくつかの閉曲線とする。

(3) 閉曲線の数が二つのものを選びlongitude l_1, l_2とする。

(4) 語 $\hat{l}_1$，$\hat{l}_2$を読む。

(5) 交点数行列式 $D(W)$ が ± 1 のものを選ぶ。

(6) 語 $\hat{l}_1$，$\hat{l}_2$の一方が他方に含まれるものを除く。

以上のアルゴリズムで，irreducibleな $m.l$ー系をもつ，S^3でないホモロジー3次元球面が，交点数の制限のもとですべてoutputされる。もしもその中に基本群$\pi_1(W)$がtrivialなもの（ホモトピー3次元球面）が存在すれば，Poincaré予想は否定的に解決される。逆にこれらのホモロジー3次元球面の基本群がすべてtrivialでないことが確められれば，部分的ではあるが，Poincaré予想は肯定されたことになる。しかし群がtrivialでないことを証明する

のは非常に難しく，もちろんコンピュータで確める方法は無さそうに見える。現段階では output されたホモロジー3次元球面Wの特徴を調べ，いくつかの type に分類することと，基本群 $\pi_1(W)$ が trivial かどうかをしらみつぶしに当ることを努力しています。

REFERENCES

[1] R.H.Bing Necessary and sufficient conditions that a 3-manifold be S^3, Annanls of Math. vol. 68, No. 1, July, 1958.

[2] R.H.Bing and J.M.Martin Cubes with knotted holes, Trans. Amer. Math. Soc. 155 (1971) 217-231.

[3] J.S.Birman and H.M.Hilden Heegaard splittings of Branched Coverings of S^3, Transactions of the American Math. Soc. vol. 213, p.315-352 1975.

[4] H.S.M.Coxeter and W.O.J.Moser Generators and Relations for Discrete Group, Ergebnisse der Mathmatik und ihrer Grenzgebiete, Band 14, Springer-verlag, Berlin, 1965.

[5] R.H.Fox Construction of simply connected 3-manifolds, Topology of 3-manifolds and Related Topics (Proc. Univ. of Georgia Inst., 1961) Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962, pp213-216.

[6] W.Haken Various aspects of the three-domensional Poincaré Preblem, Topology of Manifolds (Proc. Inst. Univ. of Georgia, Athens, Ga., 1969) Markham, Chicago, III., 1970, p140-152.

[7] W.Haken Trivial loops in homotopy 3-spheres, Illinois J. Math., II (1967) 547-554.

[8] J.Hempl A simply connected 3-manifold is S^3 if it is the sum of a solid torus and the complement of a torus knot, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964) 154-158.

[9] W.Magnus, A.Karrass and D.Solitar Combinatorial Group Theory: Presentations of Groups in Terms of Generators and Relations, Pure and Appl. Math., vol. 13, Interscience, New York, 1966.

[10] J.W.Milnor "A unique decomposition theorem for 3-manifolds" Am. Jour. Math., 84 (1962), 1-7.

[11] Donald Myers Homeomorphisms on the solid double torus, Can. J. Math., vol. XXVII, No. 4, 1975 pp.797-804.

[12] C.D.Papakyriakopoulos A Reduction of the Poincaré conjecture to Group Theoretic conjectures, Annals of Mathematics, vol. 77 No. 2, March, 1963.

[13] R.Riley Knots with the parabolic property P, Quart. J. Math. (2) 25 (1974) 273-283.

[14] R.Riley Homeomorphisms of Knot Groups on Finite Groups, Math. of Computation, vol. 25, No. 115, pp603-619, July 1971.

[15] J.Singer Three-dimensional manifolds and their Heegaard-diagrams, Trans. Am. Math. Soc. 35 (1933) 88-111.

[16] John Stallings How not to prove the Poincaré conjecture, Ann. of Math. Study, No. 60 (1966), 83-88.

[17] Ja.Viro Linkings, 2-sheeted branched coverings, and braids, Math. U.S.S.R. Sbornik 16 (1972), 222-236.

[18] I.A.Volodin, V.E.Kuznetsov and A.T.Fomenko The Problem of Discriminating Algorithmically the Standard Three-Dimensional Sphere, Russion Math. Surveys 29:5 (1974), 71-172.

[19] F.Waldhausen Heegaard-Zerlegung der 3-sphere, Topology 7 (1968) 195-203.

[20] E.C.Zeeman Seminar on Combinatorial topology, Inst. Hautes Etudes Sci. Pubi. Math., Paris, 1963.

[21] 本間龍雄 "S^3 の種数 2 の Heegaard 分解", 京都大学数理解析研究所講究録 1976年9月.

[22] 落合豊行 "genus 2 の Heegaard 分解をもつ homology 3-sphere について", 京大数理解析研講究録 268, pp. 52-68, 1976年4月。

[23] 高橋元男 "種数 2 の Heegaard 分解についての Birman-Hilden の定理の別証", 京大数理解析研究所講究録, 1975年2月.